专业: ______ 座位号: ______ 考场号: ______ 所在院校: ______ 准考证号: ______ 姓名: ______

密封线 答题时不要超过此线

# 第十六届全国大学生数学竞赛初赛试卷参考答案

## (非数学 B 类, 2024 年)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 满分 | 30 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 100 |
| 得分 | | | | | | | |

**注意:**

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

一、(本题 30 分，每小题 6 分)

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)-x^2}{\sin^4 x}=$ ______.

(2) $\int_{-2}^{2}(x^3\cos^5 x+\sqrt{4-x^2})\mathrm{d}x=$ ______.

(3) 设 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{3y}+\int_0^{x+y}\cos t^2\mathrm{d}t=1$ 确定. 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{(0,0)}=$ ______.

(4) 设 $z=f(xy,\mathrm{e}^{x+y})$, 其中 $f$ 具有二阶连续偏导数. 则

$z_{xy}=$ ______.

(5)设 $D:x^2+y^2\leqslant r^2$, 其中 $r>0$. 则 $\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{\iint_D(\mathrm{e}^{x^2+y^2}-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^4}=$ ______.

**解答.** (1) $x\to 0$ 时，$\ln(1+x^2)=x^2-\dfrac{x^4}{2}+o(x^4),\sin^4 x=x^4+o(x^4)$. 故原式 $=-\frac{1}{2}$.

(2) 由于积分区间对称，被积函数第一项是奇函数，故原式 $=\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$. 注意，此积分为圆心在原点，半径为 2 的上半圆盘的面积，故积分 $=2\pi$.

(3) 两端对 $x$ 求导得

$$3y'\mathrm{e}^{3y}+(1+y')\cos(x+y)^2=0.$$

继续求导得

$$3y''\mathrm{e}^{3y}+9(y')^2\mathrm{e}^{3y}+y''\cos(x+y)^2-2(x+y)(1+y')^2\sin(x+y)^2=0.$$

将 $x=0,y=0$ 分别代入上面两式，得

$$y'(x)|_{(0,0)}=-\frac{1}{4},\quad y''(x)|_{(0,0)}=-\frac{9}{64}.$$

(4)

$$\begin{aligned}
z_x &= yf_1+\mathrm{e}^{x+y}f_2.\\
z_{xy} &= (xf_{11}+\mathrm{e}^{x+y}f_{12})y+f_1+(xf_{21}+\mathrm{e}^{x+y}f_{22})\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^{x+y}f_2\\
&= xyf_{11}+(x+y)\mathrm{e}^{x+y}f_{12}+\mathrm{e}^{2(x+y)}f_{22}+f_1+\mathrm{e}^{x+y}f_2.
\end{aligned}$$

(5) 利用极坐标变换 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$, 则

$$\iint_D(\mathrm{e}^{x^2+y^2}-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi\int_0^r(\mathrm{e}^{\rho^2}-1)\rho\mathrm{d}\rho=\pi(\mathrm{e}^{r^2}-1-r^2).$$

注意，$r\to 0^+$ 时，$\mathrm{e}^{r^2}-1-r^2=\frac{r^4}{2}+o(r^4)$, 故原式 $=\frac{\pi}{2}$.

专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

二、(本题 14 分) 用Lagrange乘子法求函数 $f(x,y,z) = x+2y+3z$ 在平面 $x-y+z=1$ 和圆柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线上的最大值.

**解答.** 构造Lagrange函数

$$L(x,y,z;\lambda,\mu) = x+2y+3z-\lambda(x-y+z-1)-\mu(x^2+y^2-1).$$

............................................................ (2 分)

解方程组

$$\begin{cases} L_x = 1-\lambda-2\mu x = 0, \\ L_y = 2+\lambda-2\mu y = 0, \\ L_z = 3-\lambda = 0, \\ x-y+z-1=0, \\ x^2+y^2-1=0. \end{cases}$$

不难得到，$\lambda = 3, x = -\dfrac{1}{\mu}, y = \dfrac{5}{2\mu}$. 代入 $x^2+y^2-1=0$ 得 $\mu = \pm\frac{\sqrt{29}}{2}$. 于是 $x = \mp\frac{2}{\sqrt{29}}, y = \pm\frac{5}{\sqrt{29}}, z = 1\pm\frac{7}{\sqrt{29}}$. .............................. (12 分)

注意到

$$f\left(\mp\frac{2}{\sqrt{29}}, \pm\frac{5}{\sqrt{29}}, 1\pm\frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3\pm\sqrt{29}.$$

所以函数 $f$ 在给定曲线上的最大值为 $3+\sqrt{29}$. ................. (14 分)

| 得分 | |
| --- | --- |
| 评阅人 | |

三、(本题 14 分) 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x+3)}$ 在 $x_0=2$ 处的Taylor级数，并确定它的收敛域.

**解答.** $f(x)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+3}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{1+x-2}-\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{x-2}{5}}\right).$ ..... (4 分)

又

$$\frac{1}{1+x-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-2)^n,\quad |x-2|<1,$$

$$\frac{1}{1+\frac{x-2}{5}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x-2}{5})^n,\quad |\frac{x-2}{5}|<1.$$

于是得到 $f(x)$ 在 $x=2$ 处的Taylor展式

$$f(x)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-\frac{1}{5^{n+1}})(x-2)^n,\quad |x-2|<1.$$

............................................................ (10 分)

当 $x=1$ 时，级数变为 $\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-\dfrac{1}{5^{n+1}})$, 它的通项不趋于零，发散.

当 $x=3$ 时，级数变为 $\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-\dfrac{1}{5^{n+1}})$, 它的通项不趋于零，发散.

所以该幂级数的收敛域为 $(1,3)$. .............................. (14 分)

专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

四、 (本题 14 分) 求微分方程 $(x^3-y^2)\mathrm{d}x+(x^2y+xy)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

**解法1.** 设 $u=y^2$, 则原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2u}{x(1+x)}-\dfrac{2x^2}{x+1}$. …………… (6 分)

这线性方程的通解为

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^2u+(1+x)^2=C.$$

即

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^2y^2+(1+x)^2=C.$$

…………………………………………………… (14 分)

**解法2.** 原方程可化为

$$x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+y\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}=0,$$

即,

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+y^2)+y\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)=0.$$

…………………………………………………… (6 分)

两边同时除以 $\sqrt{x^2+y^2}$, 得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}}\cdot\frac{y}{x}\cdot\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)=0,$$

即,

$$\mathrm{d}(\sqrt{x^2+y^2})+\mathrm{d}\left(\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}\right)=0.$$

故,

$$\sqrt{x^2+y^2}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=C,$$

即,

$$(1+x)\sqrt{x^2+y^2}=Cx.$$

…………………………………………………… (14 分)

**解法3.** 将原方程化为 $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+y\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}=0$, 即

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+y^2)+y\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)=0.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (6 分)

令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则 $r=\sqrt{x^2+y^2}, \tan\theta=\dfrac{y}{x}$, 方程化为

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}r^2+r\sin\theta\mathrm{d}\tan\theta=0,$$

$$\mathrm{d}r+\sec\theta\tan\theta\mathrm{d}\theta=0.$$

积分得，$r+\sec\theta=C$.

换回原变量，得原方程的通解为

$$\sqrt{x^2+y^2}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=C.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (14 分)

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

五、(本题 14 分) 已知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

(1) 计算 $I_1 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$.

(2) 计算 $I_2 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \mathrm{d}x$.

**解答.** (1) 当 $a > 0$ 时，做变换 $x = \frac{u}{a}$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\frac{u}{a}}\mathrm{d}\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{\pi}{2}$.

.............................................................. (2 分)

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x &= -\frac{1}{x}\cdot\sin^2 x\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\cdot 2\sin x\cos x\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

.............................................................. (6 分)

(2) $a > 0$ 时，做变换 $x = \frac{u}{a}$, 易得 $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(ax)}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}a$. 因此

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \mathrm{d}x &= -\frac{1}{2x^2}\cdot\sin^3 x\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2x^2}\cdot 3\sin^2 x\cos x\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x\sin(2x)}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{3}{8}\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - \cos(3x)}{x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{8}\int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos(3x)) - (1-\cos x)}{x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{8}\int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right) - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{4}\left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)}{x^2}\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}.\end{aligned}$$

.............................................................. (14 分)

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

六、(本题 14 分) 设 $f(x)$是 $(-\infty,+\infty)$上具有连续导数的非负函数，且存在 $M>0$ 使得对任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$, 有 $|f'(x)-f'(y)|\leqslant M|x-y|$. 证明：对于任意实数 $x$, 恒有 $(f'(x))^2\leqslant 2Mf(x)$.

**证明.** 任取 $x\in(-\infty,+\infty)$, 对任意 $h\in(-\infty,+\infty)$,且 $h\neq 0$, 恒有

$$\begin{aligned}0\leqslant f(x+h)&=f(x)+\int_0^h f'(x+t)\mathrm{d}t\\&=f(x)+\int_0^h(f'(x+t)-f'(x))\mathrm{d}t+f'(x)h.\end{aligned}$$

............................................................ (6 分)

取 $h$ 使得 $hf'(x)\leqslant 0$, 则

$$-f'(x)h\leqslant f(x)+\int_0^h(f'(x+t)-f'(x))\mathrm{d}t\leqslant f(x)+M\frac{h^2}{2}.$$

$$|f'(x)|\leqslant\frac{f(x)}{|h|}+M\frac{|h|}{2}.$$

............................................................ (12 分)

取$|h|=\sqrt{\frac{2f(x)}{M}}$,即得所证不等式 $(f'(x))^2\leqslant 2Mf(x)$. ............ (14 分)