第十四届全国大学生数学竞赛初赛第二次补赛试卷参考答案
(数学 B 类, 2022 年)

专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、 (本题 15 分) 设空间直角坐标系中三角形 ABC 的三个顶点坐标为： $A=(1,2,3)$，$B=(2,3,1)$，$C=(3,1,2)$. M 为三角形 ABC 的三中线交点(重心). 求过点 M 的平面方程，该平面与三角形 ABC 垂直，且与直线 BC 平行.

解答. 重心 M 点的坐标为

$$M=\frac{1}{3}(A+B+C)=(2,2,2).$$

…………………………………………………………… (5 分)

因为

$$\overrightarrow{AB}=(1,1,-2),\ \ \overrightarrow{BC}=(1,-2,1),$$

三角形 ABC 所在平面的法向量为

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=(-3,-3,-3)=(-3)\cdot(1,1,1).$$

该向量$(1,1,1)$和向量$\overrightarrow{BC}=(1,-2,1)$均平行于所求的平面，故所求平面法向量为

$$(1,1,1)\times(1,-2,1)=(3,0,-3)=3\cdot(1,0,-1).$$

…………………………………………………………… (10 分)

因为所求平面过$M=(2,2,2)$点，所以该平面方程为

$$(x-2)-(z-2)=0,$$

$$x-z=0.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (15 分)

专业:________ 座位号:________ 考场号:________ 所在院校:________ 准考证号:________ 姓名:________

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设 $\Gamma=\{\{(x_n\}\big|x_n=0,2\}$, 即 Γ 为全体各项为 0 或 2 的数列构成的集合. 对于任何 $x=\{x_n\}\in\Gamma$，令

$$\Pi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n},\quad f(x)=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

证明: 1. Π 是单射; 2. 集合 $\Pi(\Gamma)$ 中的每一点均为 $\Pi(\Gamma)$ 的聚点; 3. $f(\Gamma)=[0,2]$.

解答. 1. 设 $\{x_n\},\{y_n\}\in\Gamma$ 且 $\{x_n\}\neq\{y_n\}$. 设正整数 k 是使得 $x_\ell\neq y_\ell$ 的最小整数 ℓ. 则 $|x_k-y_k|=2$, 而 $x_n=y_n,\quad n<k$. 从而

$$\Big|\Pi(\{x_n\})-\Pi(\{y_n\})\Big|\geqslant\frac{2}{3^k}-\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{|x_n-y_n|}{3^n}\geqslant\frac{2}{3^k}-\sum_{n=k+1}\frac{2}{3^n}=\frac{1}{3^k}.$$

故 Π 是单射.

.... (5 分)

2. 任取 $\{x_n\}\in\Gamma$, 记 $A=\Pi(\{x_n\})$. 用 Y_n 表示第 n 项为 2 而其余各项为 0 的数列, $X_n=\sum\limits_{n=1}^{k}\frac{x_n}{3^n}$. 则 $X_n+Y_{2n}\in\Gamma$ 且两两不同. 易见

$$\lim_{k\to\infty}|A-(X_n+Y_n)|=0.$$

于是, 集合 $\Pi(\Gamma)$ 中的每一点均为 $\Pi(\Gamma)$ 的聚点.

.... (10 分)

3. 首先易见 $f(\Gamma)\subseteq[0,2]$. 我们来证明 $f(\Gamma)=[0,2]$. 任取 $\alpha\in[0,2]$, 归纳地定义 x_n 如下: 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$. 首先取 $x_1=0$, 依次取

$$x_{n+1}=\begin{cases}0, & 若\ S_n\geqslant n\alpha,\\ 2, & 若\ S_n<n\alpha.\end{cases}$$

则 $\{x_n\}\in\Gamma$. 易见 $0\times\alpha\leqslant S_1\leqslant 0\times\alpha+2$. 进一步, 若对某个 n 成立 $(n-1)\alpha\leqslant S_n\leqslant(n-1)\alpha+2$, 则当 $S_n\geqslant n\alpha$ 时, 有 $n\alpha\leqslant S_{n+1}=S_n\leqslant n\alpha+2$. 而当 $S_n<n\alpha$ 时, $n\alpha<S_n\leqslant S_{n+1}=S_n+2\leqslant n\alpha+2$. 由数学归纳法, 我们得到了对任何 $n\geqslant 1$ 成立 $(n-1)\alpha\leqslant S_n\leqslant(n-1)\alpha+2$. 因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=\alpha$.

.... (15 分)

得分	
评阅人	

三、 (本题 15 分) 设 $n \geq 2$, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为数域 K 上的方阵, 它们的极小多项式两两互素. 证明: 给定数域 K 上的任意多项式 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x) \in K[x]$, 存在多项式 $f(x) \in K[x]$ 使得对所有 $i = 1, 2, \cdots, n$ 有 $f(A_i) = f_i(A_i)$.

解答. 对于 $i = 1, 2, \cdots, n$, 记矩阵 A_i 的极小多项式为 $p_i(x)$. 下面对 n 做归纳.

当 $n = 2$ 时, 由于 $p_1(x)$ 与 $p_2(x)$ 互素, 存在多项式 $u(x), v(x) \in K[x]$ 使得

$$u(x)p_1(x) + v(x)p_2(x) = 1,$$

从而

$$u(x)(f_1(x) - f_2(x))p_1(x) + v(x)(f_1(x) - f_2(x))p_2(x) = f_1(x) - f_2(x),$$

即

$$u(x)(f_2(x) - f_1(x))p_1(x) + f_1(x) = v(x)(f_1(x) - f_2(x))p_2(x) + f_2(x).$$

令

$$f(x) = u(x)(f_2(x) - f_1(x))p_1(x) + f_1(x) = v(x)(f_1(x) - f_2(x))p_2(x) + f_2(x),$$

由于 $p_1(A_1) = 0$ 且 $p_2(A_2) = 0$, 故有 $f(A_1) = f_1(A_1), f(A_2) = f_2(A_2)$.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (7 分)

设结论对 $n = k$ 成立, 即存在多项式 $g(x) \in K[x]$ 使得 $g(A_j) = f_j(A_j), 1 \leq j \leq k$. 当 $n = k + 1$ 时, 令

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}.$$

显然矩阵 B 的极小多项式整除 $p_1(x)p_2(x)\cdots p_k(x)$, 由于矩阵 $A_1, A_2, \cdots, A_k, A_{k+1}$ 的极小多项式 $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_k(x), p_{k+1}(x)$ 两两互素, 所以矩阵 B 的极小多项式与矩阵 A_{k+1} 的极小多项式互素, 对矩阵 B 和 A_{k+1} 利用前面证明的 $n = 2$ 时的结论, 存在多项式 $f(x) \in K[x]$ 使得 $f(B) = g(B)$ 且 $f(A_{k+1}) = f_{k+1}(A_{k+1})$.

从而对于 $1 \le j \le k$ 有 $f(A_j) = g(A_j) = f_j(A_j)$ 且 $f(A_{k+1}) = f_{k+1}(A_{k+1})$, 故结论对 $n = k+1$ 成立.

……………………………………………………………… (14 分)

根据数学归纳法, 结论对任意正整数 $n \ge 2$ 成立.

……………………………………………………………… (15 分)

得分	
评阅人	

四、 (本题 20 分) 设 3 阶实对称矩阵 A 的三个特征值为 $-1,1,1$. 又 A 的与特征值 -1 相对应的一个特征向量为 $p=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, 求 A.

解答. 用 V_{-1},V_1 分别表示矩阵 A 关于 -1 和 1 的特征向量空间, 则有 $\mathbb{R}^3=V_{-1}\dotplus V_1$, 此处$\dotplus$ 表示正交和.

.... (5 分)

注意到 V_{-1} 的正交补子空间是唯一的, 因此有 $V_{-1}^{\perp}=V_1$, 即

$$V_1=\{x\in\mathbb{R}^3\mid p\cdot x=0\}=\left\{k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\middle|\,k_1,k_2\in\mathbb{R}\right\}.$$

由此得到 V_1 的一组基为 $p_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. (15 分)

令 $P=(p,p_2,p_3)$, 于是有

$$AP=P\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix},$$

$$A=P\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}.$$

.... (20 分)

专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

五、 (本题 15 分) 设 $x \in [0,1]$, $y_1 = \frac{x}{2}$, $y_{n+1} = \dfrac{x - y_n^2}{2}$ $(n \geqslant 1)$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ 存在并求其值.

证明. 法 I. 若 $x = 0$, 则 y_n 恒为零. 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$.

…………………………………………………………(2 分)

下设 $x > 0$. 此时, 用数学归纳法易证

$$0 < y_n < \frac{x}{2}, \qquad n \geqslant 1.$$

…………………………………………………………(5 分)

另一方面, 对于 $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} y_{n+4} - y_{n+2} = \frac{y_{n+1}^2 - y_{n+3}^2}{2} &= \frac{\big(y_{n+1} + y_{n+3}\big)\big(y_{n+1} - y_{n+3}\big)}{2} \\ = \quad \frac{\big(y_{n+1} + y_{n+3}\big)\big(y_{n+2}^2 - y_n^2\big)}{4} \\ = \quad \frac{\big(y_{n+1} + y_{n+3}\big)\big(y_{n+2} + y_n\big)\big(y_{n+2} - y_n\big)}{4}. \end{aligned}$$

因此, $y_{n+4} - y_{n+2}$ 与 $y_{n+2} - y_n$ 同时为正, 或同时为负, 或同时为零.
这表明 $\{y_{2n}\}$ 和 $\{y_{2n+1}\}$ 单调. 结合有界性得到 $\{y_{2n}\}$ 和 $\{y_{2n+1}\}$ 均收敛, 设极限依次为 A, B.

…………………………………………………………(9 分)

则 $A, B \in [0, \frac{x}{2}]$, $A = \frac{x - B^2}{2}$, $B = \frac{x - A^2}{2}$.

…………………………………………………………(12 分)

则 $A - B = \frac{(A-B)(A+B)}{2}$.
若 $A \neq B$, 则 $A + B = 2$. 进而 $4 = 2A + x - A^2 = 2B + x - B^2$. 结合 $A, B \in [0, \frac{x}{2}]$ 得到 $A = B = 1 + \sqrt{5 - x}$. 这与 $A + B = 2$ 矛盾.
因此, 必有 $A = B$ 以及 $A = \frac{x - A^2}{2}$. 结合 $A \in [0, \frac{x}{2}]$ 得到 $A = -1 + \sqrt{1 + x}$.
总之, $\{y_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = -1 + \sqrt{1 + x}$.

…………………………………………………………(15 分)

法 II. 用数学归纳法易证

$$0 \leqslant y_n \leqslant x, \qquad n \geqslant 1.$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(4 分)

设 $\{y_n\}$ 的上下极限依次为 L, ℓ. 则 $0 \leqslant \ell \leqslant L \leqslant x$, $L = \frac{x-\ell^2}{2}$, $\ell = \frac{x-L^2}{2}$.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(12 分)

则 $L - \ell = \frac{(L-\ell)(L+\ell)}{2}$.

若 $L \neq \ell$, 则 $L + \ell = 2$. 进而 $4 = 2L + x - L^2 = 2\ell + x - \ell^2$. 结合 $L, \ell \in [0, x]$ 得到 $L = \ell = 1 + \sqrt{5 - x}$. 这与 $L + \ell = 2$ 矛盾.

因此, 必有 $L = \ell$ 以及 $L = \frac{x-L^2}{2}$. 结合 $L \in [0, x]$ 得到 $L = -1 + \sqrt{1+x}$.

总之, $\{y_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = -1 + \sqrt{1+x}$.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(15 分)

法 III. 用数学归纳法易证

$$0 \leqslant y_n \leqslant \frac{x}{2}, \qquad n \geqslant 1.$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(4 分)

对于 $n \geqslant 1$,

$$|y_{n+2} - y_{n+1}| = \frac{|y_{n+1}^2 - y_n^2|}{2} = \frac{(y_{n+1} + y_n)}{2}|y_{n+1} - y_n| \leqslant \frac{|y_{n+1} - y_n|}{2}.$$

因此, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(y_{n+1} - y_n)$ 绝对收敛(或写 $\{y_n\}$ 是 Cauchy 列), 从而 $\{y_n\}$ 收敛, 设极限为 A, 则 $A = \frac{x-A^2}{2}$. 结合 $A \geqslant 0$ 得到 $A = -1 + \sqrt{1+x}$.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(15 分)

法 IV. 用数学归纳法易证

$$0 \leqslant y_n \leqslant x, \qquad n \geqslant 1.$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(4 分)

记 $A = -1 + \sqrt{1+x}$. 则 $0 \leqslant A \leqslant \sqrt{2} - 1$, $A = \frac{x-A^2}{2}$,

$$|y_{n+1} - A| = \frac{|A^2 - y_n^2|}{2} = \frac{(A + y_n)}{2}|y_n - A| \leqslant \frac{|y_n - A|}{\sqrt{2}}, \qquad \forall\, n \geqslant 1.$$

于是归纳可得

$$|y_n - A| \leqslant \frac{|y_1 - A|}{2^{\frac{n-1}{2}}}, \qquad n \geqslant 1.$$

由此即得 $\{y_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = A = -1 + \sqrt{1+x}$.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(15 分)

专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

六、 (本题 20 分) 设 $a>1$. 在 $[0,+\infty)$ 上定义函数 f:

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x\in[0,a)\\ (-1)^{k+1}, & x\in[a^k,a^{k+1}),k\geqslant 1.\end{cases}$$

定义 $a_n=\int_0^n f(x)\,dx$. 求 $A\equiv\left\{\beta\in\mathbb{R}\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\beta}\text{ 绝对收敛}\right\}$ 以及 $B\equiv\left\{\beta\in\mathbb{R}\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\beta}\text{ 收敛}\right\}$.

证明. 设 $n\geqslant a^3$, 则有 $k\geqslant 3$ 使得 $n\in[a^k,a^{k+1})$. 我们有

$$\begin{aligned}a_n&=\int_0^n f(x)\,dx\\&=\int_0^a f(x)\,dx+\sum_{\ell=1}^{k-1}\int_{a^\ell}^{a^{\ell+1}} f(x)\,dx+\int_{a^k}^n f(x)\,dx\\&=-a+\sum_{\ell=1}^{k-1}(-1)^{\ell+1}(a^{\ell+1}-a^\ell)+(-1)^{k+1}(n-a^k)\\&=-a+a(a-1)\frac{1-(-a)^{k-1}}{1+a}+(-1)^{k+1}(n-a^k)\\&=-\frac{2a}{1+a}+(-1)^k\Big(\frac{2a^{k+1}}{(1+a)n}-1\Big)n.\end{aligned}$$

.... (5 分)

由 $a^k\leqslant n<a^{k+1}$ 可得

$$-\frac{a-1}{1+a}\leqslant\frac{2a^{k+1}}{(1+a)n}-1\leqslant\frac{a-1}{1+a}.$$

于是,

$$|a_n|\leqslant\frac{2a}{1+a}+\frac{(a-1)n}{1+a}\leqslant an,\qquad\forall n\geqslant a^3+2.$$

因此 $(2,+\infty)\subseteq A\subseteq B$.

.... (10 分)

接下来我们要证明 $A=B=(2,+\infty)$.

取 m 足够大使得 $a^m>\frac{8a}{a-1}+a^3+2$. 此时对于 $k\geqslant m$, 自然有 $a^{2k+1}-a^{2k}\geqslant 8$, 因此 $[a^{2k},a^{2k+1})$ 中包含整数. 我们来估算满足下式的 $n\in[a^{2k},a^{2k+1})$ 的个数 N_k:

$$\frac{a^{2k+1}}{n}\leqslant\frac{a+3}{4}. \tag{1}$$

我们有

$$N_k \geqslant [a^{2k+1}] - \big[\frac{4a^{2k+1}}{a+3}\big] - 1 \geqslant a^{2k+1} - \frac{4a^{2k+1}}{a+3} - 2 \geqslant \frac{(a-1)a^{2k}}{4}.$$

而对于满足 (1) 的 n, 有

$$\begin{aligned} -\frac{a_n}{n^2} &= \frac{1}{n^2}\Big(\frac{2a}{1+a} + \big(1 - \frac{2a^{2k+1}}{(1+a)n}\big)n\Big) \\ &\geqslant \frac{1}{n^2}\big(1 - \frac{2}{1+a}\frac{a+3}{4}\big)n \\ &= \frac{a-1}{2(1+a)n} \geqslant \frac{a-1}{2(1+a)a^{2k+1}}. \end{aligned}$$

从而对于 $\alpha \leqslant 2$, 均有

$$\sum_{\frac{4a^{2k+1}}{a+3} \leqslant n < a^{2k+1}} \frac{|a_n|}{n^\alpha} \quad \geqslant \quad N_k \frac{a-1}{2(1+a)a^{2k+1}} \geqslant \frac{(a-1)^2}{8(1+a)a}. \tag{2}$$

因此, 由 Cauchy 准则, $\alpha \notin A$. 所以, $A = (2, +\infty)$,

.... (16 分)

事实上, (2) 式左端求和号内的 a_n 都是负的, 即当 $\alpha \leqslant 2$ 时, 成立:

$$-\sum_{\frac{4a^{2k+1}}{a+3} \leqslant n < a^{2k+1}} \frac{a_n}{n^\alpha} \quad \geqslant \quad N_k \frac{a-1}{2(1+a)a^{2k+1}} \geqslant \frac{(a-1)^2}{8(1+a)a}.$$

因此, 由 Cauchy 准则, $\alpha \notin B$. 所以 $B = (2, +\infty)$.

.... (20 分)