第十四届全国大学生数学竞赛初赛第二次补赛试卷参考答案
(数学 A 类, 2022 年)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 在空间直角坐标系中设单叶双曲面 S 的方程为 $x^2+y^2-z^2=1$. 求 S 上所有可能的点 $P=(a,b,c)$，使得过 P 点且落在 S 上的两条直线均平行于平面 $x+y-z=0$.

解答. 设过 $P=(a,b,c)$ 点且落在 S 上的两条直线的方向向量 v_1 和 v_2 为

$$v_1=(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1),\ \ v_2=(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2),\ \ v_1\times v_2\neq 0. \tag{1}$$

则过 $P=(a,b,c)$ 点的这两条直线的参数方程为

$$(x,y,z)=(a,b,c)+(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)t,\ \ t\in\mathbb{R};$$

$$(x,y,z)=(a,b,c)+(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)t,\ \ t\in\mathbb{R}.$$

因为它们整体落在单叶双曲面 S 上，代入 S 的方程，得到

$$(a+\alpha_1t)^2+(b+\beta_1t)^2-(c+\gamma_1t)^2=1,\ \ t\in\mathbb{R};$$

$$(a+\alpha_2t)^2+(b+\beta_2t)^2-(c+\gamma_2t)^2=1,\ \ t\in\mathbb{R}.$$

. . . . (5 分)

于是有

$$2(a\alpha_1+b\beta_1-c\gamma_1)t+(\alpha_1^2+\beta_1^2-\gamma_1^2)t^2=0,\ \ t\in\mathbb{R};$$

姓名: 准考证号: 所在院校: 考场号: 座位号: 专业:
密封线　答题时不要超过此线

$$2(a\alpha_2+b\beta_2-c\gamma_2)t+(\alpha_2^2+\beta_2^2-\gamma_2^2)t^2=0,\ \ t\in\mathbb{R}.$$

因此

$$a\alpha_1+b\beta_1-c\gamma_1=0,\ \ a\alpha_2+b\beta_2-c\gamma_2=0. \tag{2}$$

.... (10 分)

由方程 (1) 和 (2) 得到

$$(a,b,-c)\perp v_1=(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1),\ \ (a,b,-c)\perp v_2=(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2).$$

由于 v_1 和 v_2 平行于平面 $x+y-z=0$, 该平面法向量为 $(1,1,-1)$，故

$$(1,1,-1)\perp v_1,\ \ (1,1,-1)\perp v_1.$$

于是

$$(a,b,-c)=\lambda(1,1,-1),\ \ (a,b,c)=\lambda(1,1,1).$$

由于 $P=(a,b,c)$ 落在 S 上，$a^2+b^2-c^2=1$, 故 $\lambda^2=1$, $\lambda=\pm1$. 这样求出

$$P=(a,b,c)=\pm(1,1,1).$$

.... (15 分)

专业:________ 座位号:________ 考场号:________ 所在院校:________ 准考证号:________ 姓名:________

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设 $\Gamma=\{\{(x_n\}\big|x_n=0,2\}$, 即 Γ 为全体各项为 0 或 2 的数列构成的集合. 对于任何 $x=\{x_n\}\in\Gamma$, 令

$$\Pi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n},\quad f(x)=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

证明: 1. Π 是单射; 2. 集合 $\Pi(\Gamma)$ 中的每一点均为 $\Pi(\Gamma)$ 的聚点; 3. $f(\Gamma)=[0,2]$.

解答. 1. 设 $\{x_n\},\{y_n\}\in\Gamma$ 且 $\{x_n\}\neq\{y_n\}$. 设正整数 k 是使得 $x_\ell\neq y_\ell$ 的最小整数 ℓ. 则 $|x_k-y_k|=2$, 而 $x_n=y_n,\quad n<k$. 从而

$$\Big|\Pi(\{x_n\})-\Pi(\{y_n\})\Big|\geqslant\frac{2}{3^k}-\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{|x_n-y_n|}{3^n}\geqslant\frac{2}{3^k}-\sum_{n=k+1}\frac{2}{3^n}=\frac{1}{3^k}.$$

故 Π 是单射.

.... (5 分)

2. 任取 $\{x_n\}\in\Gamma$, 记 $A=\Pi(\{x_n\})$. 用 Y_n 表示第 n 项为 2 而其余各项为 0 的数列, $X_n=\sum\limits_{n=1}^{k}\frac{x_n}{3^n}$. 则 $X_n+Y_{2n}\in\Gamma$ 且两两不同. 易见

$$\lim_{k\to\infty}|A-(X_n+Y_n)|=0.$$

于是, 集合 $\Pi(\Gamma)$ 中的每一点均为 $\Pi(\Gamma)$ 的聚点.

.... (10 分)

3. 首先易见 $f(\Gamma)\subseteq[0,2]$. 我们来证明 $f(\Gamma)=[0,2]$. 任取 $\alpha\in[0,2]$, 归纳地定义 x_n 如下: 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$. 首先取 $x_1=0$, 依次取

$$x_{n+1}=\begin{cases}0, & 若\ S_n\geqslant n\alpha,\\ 2, & 若\ S_n<n\alpha.\end{cases}$$

则 $\{x_n\}\in\Gamma$. 易见 $0\times\alpha\leqslant S_1\leqslant 0\times\alpha+2$. 进一步, 若对某个 n 成立 $(n-1)\alpha\leqslant S_n\leqslant(n-1)\alpha+2$, 则当 $S_n\geqslant n\alpha$ 时, 有 $n\alpha\leqslant S_{n+1}=S_n\leqslant n\alpha+2$. 而当 $S_n<n\alpha$ 时, $n\alpha<S_n\leqslant S_{n+1}=S_n+2\leqslant n\alpha+2$. 由数学归纳法, 我们得到了对任何 $n\geqslant1$ 成立 $(n-1)\alpha\leqslant S_n\leqslant(n-1)\alpha+2$. 因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=\alpha$.

.... (15 分)

得分	
评阅人	

三、 (本题 15 分) 设 $n \geq 2$, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为数域 K 上的方阵, 它们的极小多项式两两互素. 证明: 给定数域 K 上的任意多项式 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x) \in K[x]$, 存在多项式 $f(x) \in K[x]$ 使得对所有 $i = 1, 2, \cdots, n$ 有 $f(A_i) = f_i(A_i)$.

解答. 对于 $i = 1, 2, \cdots, n$, 记矩阵 A_i 的极小多项式为 $p_i(x)$. 下面对 n 做归纳.

当 $n = 2$ 时, 由于 $p_1(x)$ 与 $p_2(x)$ 互素, 存在多项式 $u(x), v(x) \in K[x]$ 使得

$$u(x)p_1(x) + v(x)p_2(x) = 1,$$

从而

$$u(x)(f_1(x) - f_2(x))p_1(x) + v(x)(f_1(x) - f_2(x))p_2(x) = f_1(x) - f_2(x),$$

即

$$u(x)(f_2(x) - f_1(x))p_1(x) + f_1(x) = v(x)(f_1(x) - f_2(x))p_2(x) + f_2(x).$$

令

$$f(x) = u(x)(f_2(x) - f_1(x))p_1(x) + f_1(x) = v(x)(f_1(x) - f_2(x))p_2(x) + f_2(x),$$

由于 $p_1(A_1) = 0$ 且 $p_2(A_2) = 0$, 故有 $f(A_1) = f_1(A_1), f(A_2) = f_2(A_2)$.

. . . . (7 分)

设结论对 $n = k$ 成立, 即存在多项式 $g(x) \in K[x]$ 使得 $g(A_j) = f_j(A_j), 1 \leq j \leq k$. 当 $n = k + 1$ 时, 令

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}.$$

显然矩阵 B 的极小多项式整除 $p_1(x)p_2(x)\cdots p_k(x)$, 由于矩阵 $A_1, A_2, \cdots, A_k, A_{k+1}$ 的极小多项式 $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_k(x), p_{k+1}(x)$ 两两互素, 所以矩阵 B 的极小多项式与矩阵 A_{k+1} 的极小多项式互素, 对矩阵 B 和 A_{k+1} 利用前面证明的 $n = 2$ 时的结论, 存在多项式 $f(x) \in K[x]$ 使得 $f(B) = g(B)$ 且 $f(A_{k+1}) = f_{k+1}(A_{k+1})$.

姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考场号:______ 座位号:______ 专业:______
密封线 答题时不要超过此线

从而对于 $1 \le j \le k$ 有 $f(A_j) = g(A_j) = f_j(A_j)$ 且 $f(A_{k+1}) = f_{k+1}(A_{k+1})$, 故结论对 $n = k+1$ 成立.

…………………………………………………………………… (14 分)

根据数学归纳法, 结论对任意正整数 $n \ge 2$ 成立.

…………………………………………………………………… (15 分)

得分	
评阅人	

四、(本题 20 分) 设 A, B 都是秩为 r 的 n 阶不可逆实矩阵, I 和 J 是集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的两个 $r+1$ 元子集. 用 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 表示所有 n 阶实矩阵构成的集合, 令

$V = \{C = (c_{ij})_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid c_{ij} = 0 \text{ 若 } i \notin I \text{ 或 } j \notin J\}$.

证明: 存在 $0 \neq C \in V$ 使得 $ACB = 0$.

证明. 首先可直接看出 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, $\dim \mathbb{R}^{n\times n} = n^2$, V 是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的子空间, 其维数 $\dim V = (r+1)^2$.

.... (5 分)

其次, 由矩阵 A, B 的秩都是 r 知存在 n 阶可逆矩阵 P_1, Q_1 和 P_2, Q_2 使得

$$A = P_1 \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1, \qquad B = P_2 \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2.$$

.... (7 分)

第三, 现令 $W = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid AXB = 0\}$, 则显然有 W 也为 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的子空间.
断言:

$$W = \left\{ Q_1^{-1} \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} P_2^{-1} \mid B_2 \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}, B_3 \in \mathbb{R}^{(n-r)\times r}, B_4 \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)} \right\},$$

从而 $\dim W = n^2 - r^2$.

事实上, 一方面, 将 $Q_1^{-1} \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} P_2^{-1}$ 作为X 代入AXB中, 直接计算得

$$AXB = P_1 \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1 Q_1^{-1} \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} P_2^{-1} P_2 \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2 = 0.$$

另一方面, 若 X 满足 $AXB = 0$, 记 $Y = Q_1 X P_2$, 并将 Y 分块为 $\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, 其中 B_1 为 $r \times r$ 矩阵. 则有

$$0 = AXB = P_1 \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1 X P_2 \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2$$

$$= P_1 \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2 = P_1 \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2.$$

姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考场号:______ 座位号:______ 专业:______
密封线 答题时不要超过此线

由 P_1, Q_2 可逆知 $B_1 = 0$. 所以,

$$X = Q_1^{-1} Y P_2^{-1} = Q_1^{-1} \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} P_2^{-1},$$

至此,我们证明了断言真.

.... (15 分)

最后, 由

$$\dim V + \dim W = (r+1)^2 + n^2 - r^2 > n^2 = \dim \mathbb{R}^{n \times n}$$

可以得到 $\dim V \cap W \neq 0$, 因此 $V \cap W \neq \{0\}$. 故 $\exists C \in V \cap W, C \neq 0$. 此 C 满足 $ACB = 0, C \in V$ 且$C \neq 0$. 证毕.

.... (20 分)

得分	
评阅人	

五、(本题 15 分) 设 f 与 g 在 $[a,b]$ 上可导, 且对任何 $x \in [a,b]$, $g'(x) \neq 0$. 又 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$. 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

证明. **法 I.** 由微分 Darboux 定理, g' 在 (a,b) 内恒正或恒负. 不妨设 g' 恒正. 则 g 在 $[a,b]$ 上严格单增.

. . . . (3 分)

由 $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ 及中值定理, 存在 $\xi_1 \in (a,b)$ 使得 $f(\xi_1) = 0$.

. . . . (6 分)

我们断言 f 在 (a,b) 内至少有两个零点. 否则, 结合介值定理, 以下情形之一成立:

情形 1: f 在 (a,ξ_1) 内恒正, 在 (ξ_1,b) 恒负;

情形 2: f 在 (a,ξ_1) 内恒负, 在 (ξ_1,b) 恒正;

不妨设情形 1 成立.

. . . . (9 分)

于是 $f(x)\big(g(x) - g(\xi_1)\big)$ 在 $(a,\xi_1) \cup (\xi_1,b)$ 内恒负, 因此

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\big(g(x) - g(\xi_1)\big)\,dx < 0.$$

得到矛盾.

因此, f 在 (a,b) 内必至少有两个零点. 从而由微分中值定理得到存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

. . . . (15 分)

法 II. 令 $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. 则 $F(a) = F(b) = 0$. $\Big($为规避 g' 的 Riemann 可积性, 形式计算 $\int g'(x)F(x)\,dx\Big)$ 考虑

$$G(x) = g(x)F(x) - \int_a^x f(t)g(t)\,dt, \qquad x \in [a,b].$$

则 G 可微, $G(a) = G(b) = 0$. 由微分中值定理有 $\xi_1 \in (a,b)$ 使得 $G'(\xi_1) = 0$. 即 $g'(\xi_1)F(\xi_1) = 0$. 因此, $F(\xi_1) = 0$.

. . . . (9 分)

进而由微分中值定理得到有 $\xi_2 \in (a,\xi_1), \xi_3 \in (\xi_1,b)$ 使得 $F'(\xi_2) = F'(\xi_3) = 0$. 进而有 $\xi \in (\xi_2,\xi_3)$ 使得 $F''(\xi) = 0$. 即 $f'(\xi) = 0$.

. . . . (15 分)

关于法 II 的分析及注:

(1) 如果 g' 可积, 则

$$0=\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\int_a^b F(x)g'(x)\,dx.$$

由此可得 F 在 (a,b) 内有零点 ξ_1. 进而由微分中值定理得到有 $\xi_2\in(a,\xi_1),\xi_3\in(\xi_1,b)$ 使得 $F'(\xi_2)=F'(\xi_3)=0$. 进而有 $\xi\in(\xi_2,\xi_3)$ 使得 $F''(\xi)=0$. 即 $f'(\xi)=0$.

(2) 但问题是 g' 可能不是 Riemann 可积的.

(3) 但由于 g' 恒正, 因此在 Lebesgue 积分意义下, g' 是可积的, 且上述推导过程在 Lebesgue 积分意义下成立.

(4) 若采用上述方法解答, 并指出是在 Lebesgue 积分意义下讨论, 则可给满分. 否则, 可适当扣分.

(5) 若采用积分第二中值定理, 则有 $\xi_1\in[a,b]$ 使得

$$0=\int_a^b f(x)\big(g(x)-g(a)\big)\,dx\big(g((\xi_1)-g(a)\big)\int_a^{\xi_1} f(x)\,dx=\big(g((\xi_1)-g(a)\big)F(\xi_1).$$

自然, 事实上可以取到 $\xi_1\in(a,b)$. 但为什么可以取到 $\xi_1\in(a,b)$ 需要说明.

姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考场号:______ 座位号:______ 专业:______
密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

六、 (本题 20 分) 设 $A=\left\{\sqrt{\frac{m}{n}}\middle| m,n\text{为正整数}\right\}\setminus\mathbb{Q}$, $x_0=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^{n!}}$. 对于 $x>0$, 定义 $f(x)=\begin{cases}0, & x\text{为无理数},\\ \frac{1}{q^\alpha}, & x=\frac{p}{q}\text{为既约分数}.\end{cases}$

证明: 1. 对任何 $x\in A$, 存在常数 $M_x>0$ 使得对任何既约分数 $\frac{p}{q}$ 都有 $\left|x-\frac{p}{q}\right|\geqslant\frac{M_x}{q^2}$. 2. f 在 A 中每个点可微的充要条件是 $\alpha>2$. 3. 对任何 α, 函数 f 在 x_0 处均不可微.

证明. 以下总设 $x=\sqrt{\frac{m}{n}}\in A$, $\frac{m}{n}$ 既约.

1. 我们来证明对任何正的既约分数 $\frac{p}{q}$ 成立

$$\left|\sqrt{\frac{m}{n}}-\frac{p}{q}\right|\geqslant\frac{1}{3q^2\sqrt{mn}}. \tag{1}$$

即取 $M_x=\frac{1}{3\sqrt{mn}}$ 就满足要求.

若 $\left|\sqrt{\frac{m}{n}}-\frac{p}{q}\right|\geqslant\frac{1}{\sqrt{mn}}$, 则 (1) 成立.

若 $\left|\sqrt{\frac{m}{n}}-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{mn}}$, 则 $\frac{p}{q}\leqslant 2\sqrt{\frac{m}{n}}$. 从而注意到 x 为无理数时, 整数 mq^2-np^2 非零, 得到

$$\left|\sqrt{\frac{m}{n}}-\frac{p}{q}\right|=\frac{\left|\frac{m}{n}-\frac{p^2}{q^2}\right|}{\sqrt{\frac{m}{n}}+\frac{p}{q}}\geqslant\frac{\left|\frac{m}{n}-\frac{p^2}{q^2}\right|}{3\sqrt{\frac{m}{n}}}=\frac{\left|mq^2-np^2\right|}{3q^2\sqrt{mn}}\geqslant\frac{1}{3q^2\sqrt{mn}}.$$

.... (6 分)

2. **充分性.** 由第 1 小题的结果, 有常数 $M_x>0$ 使得对任何既约分数 $\frac{p}{q}$ 都有 $\left|x-\frac{p}{q}\right|\geqslant\frac{M_x}{q^2}$. 于是对任何 $t>0$,

$$\left|f(t)-f(x)\right|=\begin{cases}0, & \text{若 } t \text{ 为无理数},\\ \frac{1}{q^\alpha}, & \text{若 } t=\frac{p}{q}\text{ 为既约分数}\end{cases}\leqslant\frac{1}{q^\alpha}\leqslant\frac{1}{M_x^{\frac{\alpha}{2}}}|t-x|^{\frac{\alpha}{2}}.$$

因此, 由 $\alpha>2$ 得到 $\lim\limits_{t\to x}\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right|=0$. 即 f 在 x 处可微且导数为零.

.... (10 分)

必要性. 我们来证明更强的结果, 当 $\alpha\leqslant 2$ 时, f 在这点 x 就是不可微的.

由 Dirichlet 定理, 存在无穷多个既约分数 $\frac{p}{q}$ (特别, 其中的 q 可以充分大) 满足

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}.$$

于是对于满足上面不等式的既约分数 $\frac{p}{q}$, 我们有

$$\left|\frac{f(x)-f(\frac{p}{q})}{x-\frac{p}{q}}\right| = \frac{1}{q^{\alpha}\left|x-\frac{p}{q}\right|} > q^{2-\alpha}.$$

因此, f 在 x 处不可微.

……………………………………………………… (14 分)

3. 易见 x_0 为无理数. 对于 $n \geqslant 1$, 令 $\dfrac{p_n}{q_n}$ 为 $t_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{10^{k!}}$ 的既约分数, 则易见 $q_n = 10^{n!}$. 另一方面,

$$x_0 - t_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} \leqslant \frac{2}{10^{(n+1)!}}$$

因此,

$$\left|\frac{f(t_n)-f(x_0)}{t_n-x_0}\right| = \frac{10^{-\alpha n!}}{x_0-t_n} \geqslant \frac{10^{-\alpha n!}}{2\times 10^{-(n+1)!}} = \frac{10^{(n+1-\alpha)n!}}{2}.$$

因此,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{f(t_n)-f(x_0)}{t_n-x_0}\right| = +\infty.$$

从而无论 α 为何值, f 在 x_0 处均不可微.

……………………………………………………… (20 分)

姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考场号:______ 座位号:______ 专业:______
密封线 答题时不要超过此线