2021 年第十三届全国大学生数学竞赛初赛补赛（数学类 A 卷）试题及参考解答

【说明】：这套试卷是因为疫情影响部分赛区延迟比较后的统一竞赛试卷！

一、(15 分) 设 S 为三维欧氏空间中的一个椭球面，P 为空间中的一个固定点，P 不在 S 上. 对任意的 $X \in S$，记 X^* 是线段 $\overline{PX}$ 的中点. 问：所有这样的点 X^* 构成的轨迹是什么？证明你的结论.

【参考解答】：设椭球面在 $O-xyz$ 直角坐标系的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

设定点 $P=(\alpha,\beta,\gamma)$，则对任意 $X=(x,y,z)\in \mathrm{S}$，由题意有

$$X^*=\frac{1}{2}(X+P)$$

记 $X^*=\left(x^*,y^*,z^*\right)$，则

$$x^*=\frac{x+\alpha}{2},y^*=\frac{y+\beta}{2},z^*=\frac{z+\gamma}{2}$$
$$\Rightarrow x=2x^*-\alpha,y=2y^*-\beta,z=2z^*-\gamma$$

由于 $\left(x,y,z\right)$ 在椭球面上，故满足椭球面方程，即

$$\frac{\left(2x^*-\alpha\right)^2}{a^2}+\frac{\left(2y^*-\beta\right)^2}{b^2}+\frac{\left(2z^*-\gamma\right)^2}{c^2}=1$$
$$\Rightarrow \frac{4\left(x^*-\frac{\alpha}{2}\right)^2}{a^2}+\frac{4\left(y^*-\frac{\beta}{2}\right)^2}{b^2}+\frac{4\left(z^*-\frac{\gamma}{2}\right)^2}{c^2}=1$$

由此可知 X^* 构成的曲面图形是一个中心点为 $\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{\gamma}{2}\right)$ 的椭球面.

二、(15 分) 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x-x^2+x^3-x^4+\cdots-x^{2018}}{(1+x)^{2021}}\mathrm{d}x.$

【参考解答】：容易知道，当 $1\le k\le 2018$ 时，

$$I_k=\int_0^{+\infty}\frac{x^k}{(1+x)^{2021}}\mathrm{d}x$$

收敛. 令 $x=\dfrac{1}{t}$，则

$$I_k=\int_0^{+\infty}\frac{t^{-k}}{\left(1+t^{-1}\right)^{2021}}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{t^{2019-k}}{(1+t)^{2021}}\mathrm{d}t$$

即 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^k}{(1+x)^{2021}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x^{2019-k}}{(1+x)^{2021}}\mathrm{d}x$，从而有

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{2k+1}}{(1+x)^{2021}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x^{2018-2k}}{(1+x)^{2021}}\mathrm{d}x$$

故由积分的线性运算性质，得

$$\text{原积分}=\sum_{k=0}^{1008}\int_0^{+\infty}\frac{x^{2k+1}-x^{2018-2k}}{(1+x)^{2021}}\mathrm{d}x=0$$

三、(15 分) 设 $R=\{0,1,4,9,16\}$，U 为 R 上的 3 阶方阵全体：

$$U=\left\{\left(a_{ij}\right)_{3\times 3}\mid a_{ij}\in R\right\}.$$

例如，$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$便为 U 中的两元. 现设 S 为 U 的一个子集. 证明：若 S 的元素个数多于 5^9-5^3-18，则必存在不同的 $A,B\in S$ 使得 $AB=BA$.

【参考证明】：设 $|E|$ 表示集合 $E\subseteq\mathbb{R}^{n\times n}$ 的元素个数. 显然有 $|U|=5^9$. 又记

$$D=\{M\mid M\in U, M\text{为对角阵}\},$$

则 $|D|=5^3$. 再记

$$J=\left\{\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}^3\right\}=\left\{\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&9&9\\9&9&9\\9&9&9\end{pmatrix}\right\}$$

则 $|J|=2$. 现记

$$L_0=\left\{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right\},S_0=\left\{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&4&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$L_1=\left\{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\},S_1=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&4&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$L_2=\left\{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}\right\},S_2=\left\{\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&4&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$L_3=\left\{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&9\end{pmatrix}\right\},S_3=\left\{\begin{pmatrix}9&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&0&0\\0&1&0\\0&4&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$L_4=\left\{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&16\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&16\end{pmatrix}\right\},S_4=\left\{\begin{pmatrix}16&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}16&0&0\\0&1&0\\0&4&1\end{pmatrix}\right\}.$$

令 $L=L_0\cup L_1\cup L_2\cup L_3\cup L_4, H=S_0\cup S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4$，则 L 中的元素乘法

可换，H 中的元素乘法也可换. 注意到 D,J,L,H 两两互不相交.

令 $T=D\cup J\cup L\cup H$，则

$$|U\setminus T|=5^9-5^3-22.$$

现倘若 S 中任意两不同元素皆不可换. 考察

$$S=(S\cap T)\cup(S\cap(U\setminus T)).$$

结果

$$|S|=|S\cap T|+|S\cap(U\setminus T)|\le|S\cap T|+|U\setminus T|.$$

由于 D,J,L,H 这 4 个集合中每个集合都是乘法可换集，故有

$$|S\cap T|\le 4$$

因为，否则的话导致 $|S\cap T|\ge 5$，从而 D,J,L,H 这 4 个集合中必有一个集合包含 S 中的两个不同元素，从而该两元素可换，不可能. 故

$$|S|\le 4+5^9-5^3-22=5^9-5^3-18$$

矛盾. 证毕.

四、(20 分) 设 a_1,a_2,a_3 为满足 $a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$ 的一组实数，b_1,b_2 为满足 $b_1^2+b_2^2=1$ 的一组实数. 又设 M_1 为 5×3 矩阵，其每一行都为 a_1,a_2,a_3 的一个排列；M_2 是 5×2 矩阵，其每一行都为 b_1,b_2 的一个排列. 令 $M=(M_1,M_2)$，它为 5×5 矩阵. 证明:

(1) $(\operatorname{tr} M)^2\le(5+2\sqrt{6})\operatorname{rank} M$；

(2) M 必有绝对值小于或等于 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 的实特征值 λ.

【参考证明】: (1) 将 M 分块为 $\begin{pmatrix}A_{3\times3} & B\\ C & D_{2\times2}\end{pmatrix}$. 显然 $M\neq 0$. 取 M 的 Jordan 分解

$$PMP^{-1}=\begin{pmatrix}J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_t\end{pmatrix}$$

不失一般性，令 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为 M 的非零特征值，$\lambda_{s+1}=\cdots=\lambda_5=0$. 于是由 M 的 Jordan 分解可看出：$s\le\operatorname{rank} M$，且

$$(\operatorname{tr} M)^2=\left|\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\right|^2\le s\sum_{i=1}^{s}|\lambda_i|^2\le\operatorname{rank} M\sum_{i=1}^{s}|\lambda_i|^2.$$

上式中第一个不等式来自施瓦茨不等式. 注意到

$$\operatorname{tr}(BB')=3,\operatorname{tr}(CC')=2$$
$$\operatorname{tr}(AA')=3,\operatorname{tr}(DD')=2$$

构造方阵 $K=\begin{pmatrix}A & \sqrt[4]{\frac{2}{3}}B\\ \sqrt[4]{\frac{3}{2}}C & D\end{pmatrix}$，则

$$KK' = \begin{pmatrix} AA' + \sqrt{\frac{2}{3}}BB' & * \\ * & \sqrt{\frac{3}{2}}CC' + DD' \end{pmatrix}$$

从而有

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(KK') &= \operatorname{tr}(AA') + \operatorname{tr}(DD') + \sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{tr}(BB') + \sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{tr}(CC') \\ &= 5 + 2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

又因为 $K = \begin{pmatrix} \sqrt[4]{\frac{2}{3}}I_3 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt[4]{\frac{3}{2}}I_3 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$，从而 K 与 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 相似，所以 M 与 K 有相同的特征值. 由 Schur 不等式，得

$$\sum_{i=1}^{s}|\lambda_i|^2 = \sum_{i=1}^{5}|\lambda_i|^2 \le \operatorname{tr}(KK') = 5 + 2\sqrt{6}$$

所以 $|\operatorname{tr}(M)|^2 \le (\operatorname{rank} M)(5 + 2\sqrt{6})$.

(2) 考虑 M 的极端情形：M_1 的每一行均取 a_1, a_2, a_3；M_2 的每一行均取 b_1, b_2，从而 $\operatorname{rank} M = 1$. 由 (1) 得

$$\begin{aligned} |\operatorname{tr} M|^2 &= |\operatorname{tr} A + \operatorname{tr} D|^2 \\ &= |a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2|^2 \le 5 + 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

一般情形下，注意到：M 有 $\lambda = a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2$ 为其特征值，此 λ 满足

$$|\lambda| \le \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

即所证结论成立.

【注】(2) 也可使用如下方法证明. 由施瓦茨不等式，

$$\left(\sum_{i=1}^{3} a_i\right)^2 \le 3 \cdot 1, \left(\sum_{i=1}^{2} b_i\right)^2 \le 2 \cdot 1,$$

从而

$$\begin{aligned} &|a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2| \\ \le &|a_1 + a_2 + a_3| + |b_1 + b_2| \le \sqrt{3} + \sqrt{2} \end{aligned}$$

注意到：M 有 $\lambda = a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2$ 为其特征值，此 λ 满足

$$|\lambda| \le \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

即所证结论成立.

五、(15 分) 设 $a_k \in (0,1), 1 \le k \le 2021$，且

$$(a_{n+2021})^{2022} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+2020},$$

其中 $n = 1, 2, \cdots$. 证明：$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ 存在.

【参考证明】：记 $X=2021^{1/2021}$．若 $\{a_n\}$ 收敛到 A，则 $A^{2022}=2021A$．从而可得 $A=0$ 或 $A=X$．令 $x_n=\dfrac{a_n}{X}$，则

$$x_{n+2021}=\left(\frac{x_n+x_{n+1}+\cdots+x_{n+2020}}{2021}\right)^{\frac{1}{2022}},n=1,2,\ldots.$$

下面证明 $\{x_n\}$ 收敛到 1．令 $s=\min\{x_1,x_2,\ldots,x_{2021}\}$，则 $0<s<1$ 且归纳可证

$$s\le x_n<1,\forall n\ge 1.$$

【法 1】：令 $y_1=y_2=\ldots=y_{2021}=s$，

$$y_{n+2021}=\left(\frac{y_n+y_{n+1}+\cdots+y_{n+2020}}{2021}\right)^{\frac{1}{2022}},n=1,2,\ldots$$

则利用数学归纳法易证 $\{y_n\}$ 为小于 1 且单调增加的正数列．所以由单调有界收敛定理，$\{y_n\}$ 收敛且极限为 1．利用夹逼准则以及 $y_n\le x_n<1,\forall n\ge 1$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$．即

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=2021^{1/2021}.$$

【法 2】：设 L,ℓ 为 $\{x_n\}$ 的上极限与下极限，则 $s\le\ell\le L\le 1$．另一方面，由递推公式可得 $\ell^{2022}\ge\ell$，从而 $\ell\ge 1$．因此 $L=\ell=1$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$，即

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=2021^{1/2021}.$$

六、(20 分) (1) 证明：$\displaystyle\lim_{\alpha\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n^{1+\alpha}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n}$；

(2) 计算 $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^{\alpha}}$，并说明理由．

【参考证明】：(1) 由于

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(k+1)-\sin k}{2\sin\frac{1}{2}}=\frac{\sin(n+1)-\sin 1}{2\sin\frac{1}{2}}$$

关于 $\alpha\ge 0$ 一致有界．而数列 $\left\{\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}\right\}$ 单调且当 $n\to\infty$ 时关于 $\alpha\ge 0$ 一致趋于零，故由 Dirichelt 判别法知级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n^{1+\alpha}}$ 关于 $\alpha\ge 0$ 一致收敛，所以

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n^{1+\alpha}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n}.$$

(2)由 Dirichlet 判别法，对任何$\alpha>0$以及$\beta\in\mathbb{R}$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+\beta)}{n^{\alpha}}$收敛. 因此

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^{\alpha}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2n^{\alpha}\sin\frac{1}{2}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)}{2n^{\alpha}\sin\frac{1}{2}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2n^{\alpha}\sin\frac{1}{2}}\\&=\frac{\cos\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}-\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}-\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\right)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

【法 1】: $\forall n\geq 1,\alpha\in(0,1)$，由 Taylor 展式，存在$\xi=\xi_{n,\alpha}\in\left(0,\frac{1}{n}\right)$使得

$$\begin{aligned}&\left|\left(\frac{1}{n^{\alpha}}-\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\right)-\frac{\alpha}{n^{1+\alpha}}\right|\\=&\left|\frac{1}{n^{\alpha}}\left(1-\frac{\alpha}{n}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha}\right)\right|\\=&\left|\frac{\alpha(\alpha+1)}{2n^{2+\alpha}}(1+\xi)^{-\alpha-2}\right|\leq\frac{\alpha}{n^{2}}\end{aligned}$$

由此可得

$$\lim_{\alpha\to0^{+}}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}-\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\right)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha}{n^{1+\alpha}}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\right|=0$$

结合 (1)即得 $\lim\limits_{\alpha\to0^{+}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^{\alpha}}=\frac{\cos\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}$.

【法 2】: $\forall\alpha\geq 0,x^{-\alpha}$是$(0,+\infty)$内的凸函数，由此可得

$$\frac{1}{n^{\alpha}}-\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\geq\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}-\frac{1}{(n+2)^{\alpha}},\ \forall n\geq 1.$$

另一方面，对于$\alpha\in[0,1]$，

$$\begin{aligned}0&\leq\frac{1}{n^{\alpha}}-\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\\&=\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1\right)\leq\frac{1}{n},\ \forall n\geq 1.\end{aligned}$$

因此，当$n\to\infty$时，$\left\{\frac{1}{n^{\alpha}}-\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\right\}$单调下降且关于$\alpha\in[0,1]$一致地于零. 从而类

似于（1）得$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}-\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\right)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)$关于$\alpha\in[0,1]$一致收敛. 因此，

$$\begin{aligned}&\lim_{\alpha\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}-\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\right)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{\alpha\to 0^+}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}-\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\right)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)=0\end{aligned}$$

从而可得 $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^{\alpha}}=\frac{\cos\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}$.

【法 3】：类似地，有

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}-\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\right)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\right|\\&=\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}-\frac{2}{(n+1)^{\alpha}}+\frac{1}{(n+2)^{\alpha}}\right)\cos(n+1)-\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\cos 1\right|\\&\le\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}-\frac{2}{(n+1)^{\alpha}}+\frac{1}{(n+2)^{\alpha}}\right)+\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\\&=\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^{\alpha}}=\frac{\cos\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}$.