

第十二届全国大学生数学竞赛初赛试卷答案 (数学类B卷, 2020年11月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 总分 |
| 满分 | 15 | 15 | 15 | 20 | 15 | 20 | 100 |
| 得分 | | | | | | | |

- 注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
 2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
 3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

| | |
|-----|--|
| 得分 | |
| 评阅人 | |

一、(本题 15 分)已知椭球面

$$\Sigma_0: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > b,$$

的外切柱面 Σ_ε ($\varepsilon = 1$ 或 -1) 平行于已知直线

$$l_\varepsilon: \frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{z-3}{c}.$$

试求与 Σ_ε 交于一个圆周的平面的法方向. 注: 本题中的外切柱面指的是每一条直母线均与已知椭球面相切的柱面.

解: 设 l 是柱面的任意一条直母线, 则由假设, l 与已知椭球面 Σ_0 相切于一点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$. 因为 l 平行于已知直线 l_ε , 所以, l 的标准方程和参数方程分别是

$$\frac{x-x_1}{0} = \frac{y-y_1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{z-z_1}{c},$$

$$x = x_1, \quad y = y_1 + \varepsilon t\sqrt{a^2-b^2}, \quad z = z_1 + ct.$$

把 l 的参数方程代入曲面 Σ_0 的方程并化简得

$$t^2 \left(\frac{a^2-b^2}{b^2} + 1 \right) + 2t \left(\varepsilon \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b^2} y_1 + \frac{1}{c} z_1 \right) + \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} - 1 = 0, \quad (1)$$

其中首项系数 $\frac{a^2-b^2}{a^2} + 1 > 0$. (5分)

专业: _____ 座位号: _____ 考场号: _____ 所在院校: _____ 准考证号: _____ 姓名: _____

答题时不要超过此线
密封线

因为点 M_1 在 Σ_0 上, 所以

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} - 1 = 0.$$

又因为 l 与 Σ_0 在 M_1 点相切, 所以 $t = 0$ 是二次方程(1)的重根。因此,

$$\varepsilon \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} y_1 + \frac{1}{c} z_1 = 0, \text{ 即 } \varepsilon c \sqrt{a^2 - b^2} y_1 + b^2 z_1 = 0.$$

此式与

$$\frac{y - y_1}{\varepsilon \sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{z - z_1}{c} \text{ 即 } \varepsilon c y_1 - \sqrt{a^2 - b^2} z_1 = \varepsilon c y - \sqrt{a^2 - b^2} z$$

联立解出

$$y_1 = \frac{b^2}{ca^2} (cy - \varepsilon \sqrt{a^2 - b^2} z), \quad z_1 = -\varepsilon \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} (cy - \varepsilon \sqrt{a^2 - b^2} z).$$

再把 $x_1 = x$ 和上面的两式代入 Σ_0 的方程, 得到外切柱面 Σ_ε 的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2 (cy - \varepsilon \sqrt{a^2 - b^2} z)^2}{a^4 c^2} + \frac{(a^2 - b^2) (cy - \varepsilon \sqrt{a^2 - b^2} z)^2}{a^4 c^2} = 1.$$

(10分)

如果令 $z = 0$, 上式化为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2 y^2}{a^4} + \frac{(a^2 - b^2) y^2}{a^4} = 1, \text{ 即 } x^2 + y^2 = a^2.$$

所以柱面 Σ_ε 与 xoy 坐标面相交于圆周

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = 0 \end{cases}.$$

由于与二次柱面 Σ_ε 的交线为圆周的所有平面都是平行的, 故知所求的法方向唯一且为 xoy 平面的法方向, 方向数为 $0, 0, 1$. (15分)

密封线 答题时不要超过此线

| | |
|-----|--|
| 得分 | |
| 评阅人 | |

二、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $1 \leq f(x) \leq 3$, 证明: $1 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \leq \frac{4}{3}$.

证: 由 Schwarz 不等式,

$$1 = \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)} \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx \right)^2 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{dx}{f(x)}$$

(5分)

又由于 $(f(x) - 1)(f(x) - 3) \leq 0$, 故有 $\frac{(f(x)-1)(f(x)-3)}{f(x)} \leq 0$, 即 $\int_0^1 (f(x) + \frac{3}{f(x)}) dx \leq 4$.
(10分)

由 $4ab \leq (a + b)^2$ 知

$$\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{3}{f(x)} dx \leq \frac{(\int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 \frac{3}{f(x)} dx)^2}{4} \leq 4$$

于是 $1 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \leq \frac{4}{3}$.

(15分)

| | |
|-----|--|
| 得分 | |
| 评阅人 | |

三、(本题15分) 设 A 为 n 阶复方阵, $p(x)$ 为 A 的特征多项式. 又设 $g(x)$ 为 m 次复系数多项式, $m \geq 1$. 证明: $g(A)$ 可逆当且仅当 $p(x)$ 与 $g(x)$ 互素.

证明: 取 A 的 Jordan 分解: $A = P \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix} P^{-1}$,

其中 $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$ 为 Jordan 块. 结果,

$$(*) \quad g(A) = P \begin{pmatrix} g(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(J_s) \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} g(\lambda_1) & * & * \\ & \ddots & * \\ & & g(\lambda_s) \end{pmatrix} P^{-1}$$

(8分)

\Leftarrow). $p(x)$ 与 $g(x)$ 互素, 于是 $p(x)$ 与 $g(x)$ 没有公共根. 注意到 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ 为 A 的所有互不相同的特征根. 故有 $g(\lambda_1), \dots, g(\lambda_s)$ 均不为 0. 结果,

$$|g(A)| = g(\lambda_1) \cdots \cdots g(\lambda_s) \neq 0,$$

$g(A)$ 可逆, 得证.

(13分)

\Rightarrow). $g(A)$ 可逆, 从而 $|g(A)| \neq 0$. 由 $|g(A)| = g(\lambda_1) \cdots \cdots g(\lambda_s)$ 知: $g(\lambda_1), \dots, g(\lambda_s)$ 均不为 0, 故 $p(x)$ 与 $g(x)$ 没有公共根. 当然 $p(x)$ 与 $g(x)$ 互素, 否则导致 $p(x)$ 与 $g(x)$ 有公共根, 矛盾.

(15分)

密封线 答题时不要超过此线

| | |
|-----|--|
| 得分 | |
| 评阅人 | |

四、(本题20分) 设 σ 为 n 维复向量空间 \mathbb{C}^n 的一个线性变换. $\mathbf{1}$ 表示恒等变换. 证明以下两条等价:

- (1) $\sigma = k\mathbf{1}, k \in \mathbb{C}$;
 (2) 存在 σ 的 $n+1$ 个特征向量: v_1, \dots, v_{n+1} , 这 $n+1$ 个向量中任何 n 个向量均线性无关.

证: (1) \Rightarrow (2). 取 $v_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, v_n = e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, v_{n+1} = e_1 + \dots + e_n =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. 则易知, v_1, \dots, v_{n+1} 均是 σ 的特征向量. 进一步, 该组向量中任何 n 个向量必

线性无关. 事实上, 不妨设这 n 个向量为: $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{n+1}$. 于是

$$a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \dots + a_{n+1} v_{n+1} = 0 \Leftrightarrow (a_1 + a_{n+1})e_1 + \dots + (a_{i-1} + a_{n+1})e_{i-1} + a_{n+1}e_i + (a_{i+1} + a_{n+1})e_{i+1} + \dots + (a_n + a_{n+1})e_n = 0.$$

结果, $a_{n+1} = 0$, 进而 $a_1 = \dots = a_{n+1} = 0$. 如所需. (5分)

(2) \Rightarrow (1). 记 $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ 分别为相应于 v_1, \dots, v_{n+1} 的 σ 的特征值, 其和为 s , 即 $s = \lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1}$. 由条件知 $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{n+1}$ 线性无关, 因此它可充当 \mathbb{C}^n 的基. σ 在此组基下的表示阵为 A :

$$\sigma(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{n+1}) = (v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{n+1})A$$

结果 $tr A = s - \lambda_i$. (10分)

又取 $v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{n+1}$, σ 在此组基下的表示阵为 B :

$$\sigma(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{n+1}) = (v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{n+1})B$$

结果 $tr B = s - \lambda_j$. 注意到 A 与 B 相似, 因为他们是同一线性变换在不同基下的表示阵. 故 $s - \lambda_i = s - \lambda_j, \lambda_i = \lambda_j$. 即

$\sigma = k\mathbf{1}, k = \lambda_1$. 证毕. (20分)

| | |
|-----|--|
| 得分 | |
| 评阅人 | |

五、(本题15分) 计算广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{(x)}{x^3} dx$, 这里 (x) 表示 x 的小数部分(例如: 当 n 为正整数且 $x \in [n, n+1)$ 时, $(x) = x - n$).

证: 对于任意正整数 $\ell > 2$, 我们有

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\ell} \frac{(x)}{x^3} dx &= \sum_{n=1}^{\ell-1} \int_n^{n+1} \frac{x-n}{x^3} = \sum_{n=1}^{\ell-1} \left(\int_n^{n+1} x^{-2} dx - n \int_n^{n+1} x^{-3} dx \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\ell-1} \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\ell-1} \frac{2n+1}{n(n+1)^2} \\
 &= \sum_{n=1}^{\ell-1} \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\ell-1} \left(\frac{2}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\ell-1} \frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\ell-1} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\ell} \frac{1}{n^2}
 \end{aligned}$$

(10分)

对于 $y \in [\ell, \ell+1)$, 我们有

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\ell} \frac{1}{n^2} = \int_1^{\ell} \frac{(x)}{x^3} dx \leq \int_1^y \frac{(x)}{x^3} dx \leq \int_1^{\ell+1} \frac{(x)}{x^3} dx = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\ell+1} \right) - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\ell+1} \frac{1}{n^2}$$

于是得到

$$\int_1^{+\infty} \frac{(x)}{x^3} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{\pi^2}{12}.$$

(15分)

密封线 答题时不要超过此线

| | |
|-----|--|
| 得分 | |
| 评阅人 | |

六、(本题20分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 满足对任意 $x \in [0, 1]$

$$\int_{x^2}^x f(t)dt \geq \frac{x^2 - x^4}{2}.$$

证明: $\int_0^1 f^2(x)dx \geq \frac{1}{10}$.

证明一: 注意到

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(t)dt = \int_0^1 dt \int_t^{\sqrt{t}} f(t)dx = \int_0^1 (\sqrt{t} - t)f(t)dt$$

..... 8分

于是, 我们有

$$\int_0^1 (\sqrt{t} - t)f(t)dt = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(t)dt \geq \int_0^1 \frac{x^2 - x^4}{2} dx = \frac{1}{15}.$$

..... 13分

因为

$$0 \leq \int_0^1 (f(t) - (\sqrt{t} - t))^2 dt = \int_0^1 f^2(t)dt - 2 \int_0^1 (\sqrt{t} - t)f(t)dt + \int_0^1 (\sqrt{t} - t)^2 dt$$

..... 18分

所以

$$\int_0^1 f^2(t)dt \geq 2 \int_0^1 (\sqrt{t} - t)f(t)dt - \int_0^1 (\sqrt{t} - t)^2 dt \geq \frac{2}{15} - \frac{1}{30} = \frac{1}{10}$$

..... 20分

证明二: 注意到

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(t)dt = \int_0^1 dt \int_t^{\sqrt{t}} f(t)dx = \int_0^1 (\sqrt{t} - t)f(t)dt$$

..... 8分

于是, 我们有

$$\int_0^1 (\sqrt{t} - t)f(t)dt = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(t)dt \geq \int_0^1 \frac{x^2 - x^4}{2} dx = \frac{1}{15}.$$

..... 13分

因为对任意 $\beta \in (0, +\infty)$

$$0 \leq \int_0^1 (\beta f(t) - (\sqrt{t} - t))^2 dt = \int_0^1 \beta^2 f^2(t) dt - 2\beta \int_0^1 (\sqrt{t} - t) f(t) dt + \int_0^1 (\sqrt{t} - t)^2 dt$$

所以

$$\begin{aligned} \int_0^1 f^2(t) dt &\geq \frac{2}{\beta} \int_0^1 (\sqrt{t} - t) f(t) dt - \frac{1}{\beta^2} \int_0^1 (\sqrt{t} - t)^2 dt \geq \frac{2}{15\beta} - \frac{1}{30\beta^2} \\ &= \frac{1}{30} \left(4 \cdot \frac{1}{\beta} - \left(\frac{1}{\beta} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

..... 17 分

容易得到当 $\beta \in [1/3, 1]$ 时, 有

$$\int_0^1 f^2(t) dt \geq \frac{1}{30} \left(4 \cdot \frac{1}{\beta} - \left(\frac{1}{\beta} \right)^2 \right) \geq \frac{1}{10}.$$

特别地, 当 $\beta = 1/2$ 时

$$\int_0^1 f^2(t) dt \geq \frac{1}{30} (4 \cdot 2 - 2^2) = \frac{2}{15} > \frac{1}{10}.$$

..... 20 分

证明三: 因为对任意 $0 < \beta < 1$, 任意正整数 n , 我们有

$$\int_{\beta^{2^n}}^{\beta} f(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{\beta^{2^k}}^{\beta^{2^{k-1}}} f(t) dt \geq \sum_{k=1}^n \frac{\beta^{2^k} - \beta^{2^{k+1}}}{2} = \frac{1}{2} (\beta^2 - \beta^{2^{n+1}}).$$

..... 5 分

于是

$$\int_0^{\beta} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\beta^{2^n}}^{\beta} f(t) dt \geq \frac{\beta^2}{2}.$$

..... 8 分

从而我们有

$$\int_0^1 f(t) dt = \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \int_0^{\beta} f(t) dt \geq \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \frac{\beta^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

..... 13 分

最后, 由柯西-希瓦尔茨不等式可得

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^1 f(t) dt \leq \left(\int_0^1 1^2 dt \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^1 f^2(t) dt \right)^{1/2}$$

姓名: _____ 准考证号: _____ 所在院校: _____ 考场号: _____ 座位号: _____ 专业: _____

-----○-----○-----○-----
密封线 答题时不要超过此线

于是,

$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq \frac{1}{4} > \frac{1}{10}.$$

..... 18 分

..... 20 分